Electrocinétique - Chapitre 3 : Régime sinusoïdal forcé

Ce qu'il faut retenir…

La réponse d'un circuit linéaire à une excitation est la superposition de 2 termes :

- Le régime transitoire libre correspondant à l'évolution du circuit en l'absence de sources (solution homogène s_H de l'équation différentielle, dépend des CI), ce régime tend rapidement vers 0 pour un système stable.

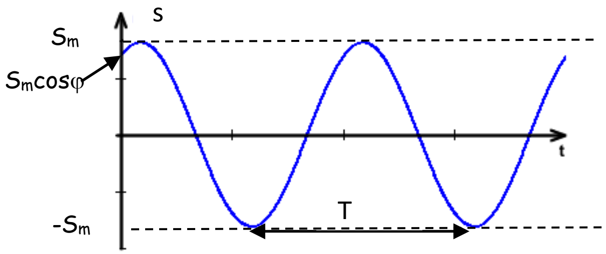
- Le régime forcé ou permanent correspondant à l'évolution du circuit en présence de sources **(solution particulière s_P de l'équation différentielle, indépendante des CI).** Lorsque $|s_H| \ll |s_P|$, le régime forcé est établi.

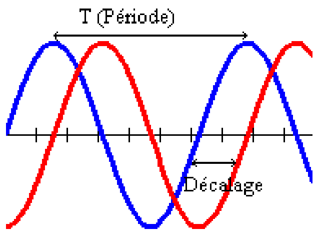
Le régime sinusoïdal forcé d'un circuit linéaire stable soumis à une excitation sinusoïdale est un régime permanent sinusoïdal de même pulsation que l'excitation qui s'établit après un régime transitoire qui tend vers 0.

SIGNAL ELECTRIQUE ALTERNATIF SINUSOÏDAL

Caractéristiques : Signal périodique de la forme : $s(t)=S_m.\cos(\omega t + \varphi)$

- S_m représente l'amplitude du signal sinusoïdal,
- $\omega t + \varphi$ représente la phase instantanée (phase à l'instant t).
- φ représente la phase à l'instant $t = 0$ ou phase à l'origine.
- ω représente la pulsation : $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ (f la fréquence, T la période)
- La valeur efficace d'un signal alternatif sinusoïdal est : $S_{eff} = \dfrac{S_m}{\sqrt{2}}$.





Lorsque l'on compare deux signaux s_1 et s_2 de même fréquence ou synchrones, il est nécessaire d'indiquer de combien de temps ils sont décalés.
Le décalage en terme de phase est appelé **déphasage** $\varphi_{1/2} = \varphi_1 - \varphi_2$.

τ le décalage temporel entre les signaux : $|\varphi_{1/2}| = \dfrac{2\pi\tau}{T} rad$.

$\varphi_{1/2} > 0$: s_1 est en avance par rapport à s_2.

Représentation complexe :

On associe au signal la grandeur complexe $\boxed{\underline{s}(t) = S_m e^{j(\omega t + \varphi)}}$ telle que $s(t)=\mathrm{Re}(\underline{s}(t))$.

On obtient l'amplitude du signal et sa phase à l'origine à partir de l'amplitude complexe :

$$\boxed{S_m = |\underline{s}| \text{ et } \varphi = \arg(\underline{s}) \quad \Rightarrow \quad S_m = \sqrt{\mathrm{Re}(\underline{s})^2 + \mathrm{Im}(\underline{s})^2} \qquad \tan\varphi = \frac{\mathrm{Im}(\underline{s})}{\mathrm{Re}(\underline{s})}}$$

Opérations sur les complexes : $\boxed{\dfrac{d\underline{s}(t)}{dt} = j\omega \underline{s}(t)}$ $\boxed{\displaystyle\int \underline{s}(t)dt = \frac{\underline{s}(t)}{j\omega}}$

La dérivée du signal est en avance de $\pi/2$ sur le signal, la primitive du signal est en retard de $\pi/2$sur le signal.

Une équation différentielle vérifiée par une grandeur sinusoïdale peut être transformée en équation algébrique vérifiée par la grandeur complexe associée.

IMPEDANCE COMPLEXE :

En convention récepteur : $\boxed{\underline{u} = \underline{Z}\,\underline{i}}$ $\underline{Z}$ est l'impédance complexe du dipôle.

$$\boxed{\underline{Z} = Ze^{j\varphi} \qquad Z = |\underline{Z}| = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} \qquad \varphi_{u/i} = \arg(\underline{Z})}$$

On définit l'admittance complexe : $\underline{Y} = \dfrac{1}{\underline{Z}}$

	R	**L**	**C**
Relation temporelle	u = Ri	$u = L\dfrac{di}{dt}$	$i = C\dfrac{du}{dt}$
Relation complexe	$\underline{u} = R\underline{i}$	$\underline{u} = jL\omega\underline{i}$	$\underline{i} = jC\omega\underline{u}$
Impédance complexe	R (réelle)	$jL\omega$ (imaginaire pure)	$\dfrac{1}{jC\omega}$ (imaginaire pure)
Déphasage	u et i en phase	u en avance sur i de $\pi/2$	u en retard sur i de $\pi/2$
Comportement à basse fréquence		fil	interrupteur ouvert
Comportement à haute fréquence		interrupteur ouvert	fil

ETUDE D'UN CIRCUIT LINEAIRE EN REGIME SINUSOÏDAL FORCE :

Loi des nœuds : Pour un nœud donné, $\sum_k \varepsilon_k \underline{i}_k = 0$, $\varepsilon_k = 1$ si i_k arrive au nœud k, $\varepsilon_k = -1$ si i_k quitte le nœud k.

Loi des mailles : Pour une maille orientée, $\sum_k \varepsilon_k \underline{u}_k = 0$, $\varepsilon_k = 1$ si u_k est orientée dans le sens de la maille, $\varepsilon_k = -1$ sinon.

Association d'impédances :

En série :

$$\underline{Z}_{eq} = \sum_{k=1}^{n} \underline{Z}_k \qquad \textit{Pont diviseur de tension} : \underline{u}_k = \frac{\underline{Z}_k}{\sum_{k=1}^{n} \underline{Z}_k}\underline{u}$$

En parallèle :

$$\underline{Y}_{eq} = \sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_k \Leftrightarrow \frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\underline{Z}_k} \qquad \textit{Pont diviseur de courant} : \underline{i}_k = \frac{\underline{Y}_k}{\sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_k}\underline{i}$$

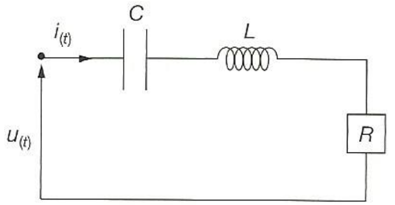
METHODE :

1. **Etablir l'équation vérifiée par la grandeur étudiée $\underline{s}$(t) : pour cela, utiliser les lois des mailles et/ou des nœuds puis les relations courant-tension des différents dipôles (en utilisant les impédances complexes) afin de se ramener à une seule inconnue $\underline{s}$(t).**

2. **Résoudre l'équation.**

3. **Déterminer complètement la grandeur étudiée :** s(t) = S_m.cos(ωt + φ) avec : $S_m = |\underline{s}|$ et φ = arg ($\underline{s}$) (rajouter π à la valeur de l'arctan donnée par la machine si la partie réelle est négative)

ETUDE D'UN RLC SERIE



On pose :

Pulsation propre : $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

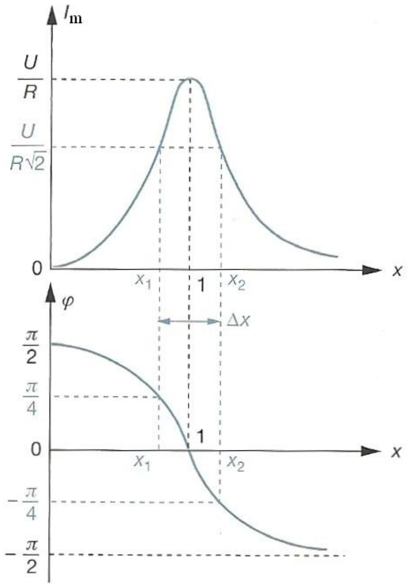
Pulsation réduite : $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$

Facteur de qualité : $Q = \dfrac{L\omega_0}{R} = \dfrac{1}{RC\omega_0}$

$u(t) = U\cos\omega t$

Résonance en intensité :

$$\underline{i} = \frac{\underline{u}}{R + j\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)} = \frac{\underline{u}}{R\left(1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)\right)} \qquad i_m = \left|\underline{i}\right| = \frac{\dfrac{U}{R}}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2}}$$



Amplitude i_m maximale pour $\omega_r = \omega_0$ ou x=1 : résonance en intensité.

La pulsation de résonance est la pulsation propre du circuit, elle est indépendante de R.

$$\varphi = \arg(\underline{i}) = -\arctan\left(Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$$

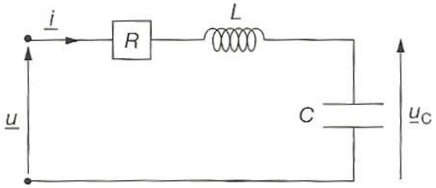
$\varphi = 0$ à la résonance, comportement résistif.

Acuité de résonance : $\dfrac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = Q$,

ω_1 et ω_2 telles que $i_m = \dfrac{I_{m,\max}}{\sqrt{2}} = \dfrac{U}{R\sqrt{2}}$

Plus Q est grand plus le pic est fin.

Résonance en tension ou surtension :



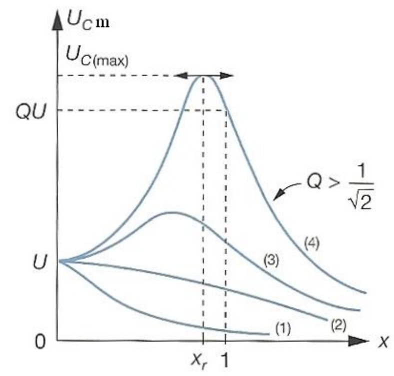
$$\underline{u}_C = \frac{\underline{u}\dfrac{1}{jC\omega}}{R + j\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)} = \frac{\underline{u}}{jRC\omega + \left(1 - LC\omega^2\right)}$$

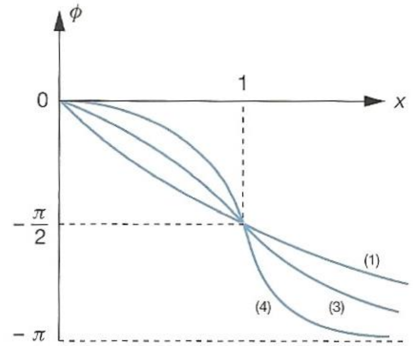
$$\underline{u}_C = \frac{\underline{u}}{j\dfrac{x}{Q} + \left(1 - x^2\right)}$$

$$u_{Cm} = \left|\underline{u}_c\right| = \frac{U}{\sqrt{\left(\dfrac{x}{Q}\right)^2 + \left(1 - x^2\right)^2}} \qquad \phi = \arg(\underline{u}_c) = -\arctan\left(\frac{x}{Q\left(1 - x^2\right)}\right)$$

Amplitude u_{cm} maximale pour $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}} \le \omega_0$, la pulsation de résonance est différente de la pulsation propre du circuit et dépend de R.

Condition de résonance : $Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$





$Q_{(4)} > Q_{(3)} > Q_{(2)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} > Q_{(1)}$